rijksuniversiteit groningen / faculty of science and engineering / institute for science education and communication

Hand-out Werkgroep 1 (16 april 2018):
Logisch redeneren voor en met leerlingen wiskunde C

Hugo Bronkhorst (h.bronkhorst@rug.nl)

Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek
slo nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

Dit werk maakt deel uit van het onderzoeksprogramma promotiebeurs voor leraren met projectnummer 023.007.043 dat (mede)gefinancierd is door de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO).

Eindtermen Wiskunde C

Domein F Logisch redeneren
De kandidaat kan logische redeneringen analyseren op correct gebruik.

Parate kennis
De kandidaat kent
- de logische symbolen $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ en $\neg$;
- bij redeneringen de begrippen conclusie, uitgangspunt, definitie, redeneerstap, correct, volledig en onvolledig;
- de begrippen contradictie en paradox.

Parate vaardigheden
De kandidaat kan
1. aangeven hoe een redenering is opgebouwd uit redeneerstappen;
2. "*als-dan*" redeneringen verbinden met de "*hier-uit-volgt*" conclusie;
3. gegevens uit een Venn-diagram halen.

Productieve vaardigheden
De kandidaat kan
4. een onderscheid maken tussen een nodige en een voldoende voorwaarde;
5. de correctheid van redeneringen en daarbij horende conclusies, zoals gebruikt in het maatschappelijk debat, verifiëren en analyseren;
6. gebruik maken van voorbeelden als illustratie van een bewering en van een tegenvoorbeeld om een bewering te weerleggen;
7. een contradictie en een paradox herkennen en beschrijven;
8. verschillende representaties, zoals tabel en (Venn-)diagram, en logische symbolen gebruiken bij het analyseren en oplossen van logische problemen.

(College voor Toetsen en Examens, 2016a, p. 15)

Methode-overzicht schoolboeken

	Eindterm	Moderne Wiskunde Hoofdstuk 2, vwo 6	Getal & Ruimte Hoofdstuk 12, deel 4	MathPlus Hoofdstuk 13, vwo 5, katern III	Experimentele uitgave cTWO, bewerking SLO voor nieuwe examenprogramma	Wageningse Methode *Naar verwaching Hoofdstuk 8 (vwo 6 wiskunde C).*
Introductie Hoofdstuk		Introductie met Sudoku, redeneringen, puzzel en vierhoeken	Logische puzzels aan begin §12-1, direct een aanpak met werkschema	Twee contexten: 1) Gevangenendilemma 2) Spelshow (m.b.v. waarheidstabel)	Logische puzzels	*Er is nog geen proefmateriaal, omdat verdere ontwikkeling 5e klas materiaal prioriteit heeft.*
Parate Kennis	Logische symbolen (niet, =>, ∧, ∨)	§2-3 (niet, =>), §2-4 (∧, ∨) Onderscheid inclusieve en exclusieve 'of'.	§12-1 (niet, =>), §12-2 (∧, ∨) Onderscheid inclusieve en exclusieve 'of'. Speciale aandacht voor haakjes. Extra: equivalentie.	§2 Onderscheid inclusieve en exclusieve 'of' bij Venn-diagrammen.	H2 (∧, ∨, niet), H3 (=>) Onderscheid inclusieve en exclusieve 'of'.	
	Begrip Conclusie	§2-2	Voorkennis	§1	H1	
	Begrip Uitgangspunt	§2-2	§12-2	§1	H1	
	Begrip Definite			§1	H1	
	Begrip Redeneerstap	§2-2	(§12-2)	§1	H1	
	Begrip Correct	§2-1		§1	H1	
	Begrip Volledig	§2-1		§1	H1	
	Begrip Onvolledig	§2-1		§1	H1	
	Begrip Contradictie	§2-5	§12-4	§5 (+tautologie)	H6	
	Begrip Paradox	§2-5	§12-4 (ook visueel)	§5	H6	
Parate Vaardigheden	Opbouw redenering m.b.v. redeneerstappen	§2-2	(§12-2)	§1	H2	
	"Als-dan" redeneringen verbinden met "hier-uit-volgt" conclusie	§2-3	§12-1	§3	H2	
	Gegevens halen uit Venn-diagram	§2-6	§12-3	§2	H7	
Productieve Vaardigheden	Onscheid tussen nodige en voldoende voorwaarde	§2-3	§12-3	§3	H5	
	Correctheid redeneren en conclusie verifiëren en analyseren (bijv. in maatschappelijk debat)	§2-1, §2-2	§12-4	§1, §4 en §5	H1, H2, H4, H5, H6	
	Gebruik maken van voorbeelden als illustratie van een bewering en van een tegenvoorbeeld om bewering te weerleggen	§2-1	Voorkennis	§4	H5	
	Contradictie en paradox herkennen en beschrijven	§2-5	§12-4	§5	H6	
	Verschillende representaties en logische symbolen gebruiken bij analyse en oplossen van logische problemen. O.a. tabel en (Venn-)diagram.	§2-6	§12-5	§2	H5 Venn-diagram pas in H6.	
Conclusies		Symbolen m.n. in vertaling zinnen en andersom. Waarheidstafels alleen in Uitdagende opdrachten (extra stof).	Aanpak richt zich snel op werkschema's (geen waarheidstafels) en symbolen. Af en toe verdiepende informatieblokken en redeneren met getallen.	Veel gebruik logische symbolen en waarheidstafels. Af en toe ook wiskundige contexten. Gebruik gemaakt van voorbeeldexamens.	Veel verschillende contexten. Symbolen als verkorting, waarheidstafels als ondersteuning.	

(Bakker e.a., 2017, Hoofdstuk 2; Bor-de Vries e.a., in press, Hoofdstuk 13; Dijkhuis e.a., 2017, Hoofdstuk 12; Roodhardt & Doorman, 2015)

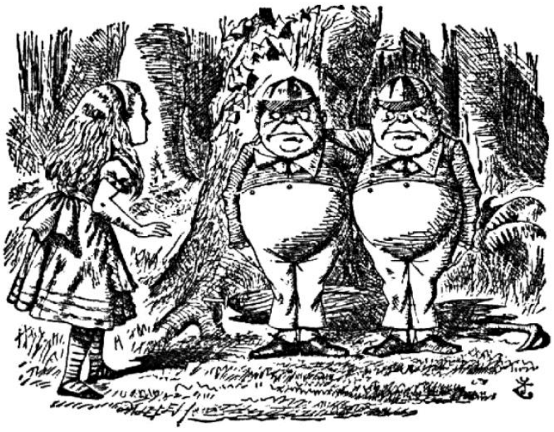
Examenopgaven

Tweelingbroers

De tweelingbroers Tweedledee en Tweedledum zijn uiterlijk niet van elkaar te onderscheiden. Om de verwarring te vergroten, hebben ze de volgende afspraken met elkaar gemaakt:

1. Op maandag, dinsdag en woensdag liegt Tweedledee bij elke vraag die hem gesteld wordt en op alle andere dagen spreekt hij de waarheid.
2. Op donderdag, vrijdag en zaterdag liegt Tweedledum bij elke vraag die hem gesteld wordt en op alle andere dagen spreekt hij de waarheid.

We gaan ervan uit dat deze afspraken in deze gehele opgave gelden.



Op zekere dag ontmoet Alice de tweeling en vraagt elk van hen: "Hoe heet jij?"
De ene tweelingbroer heeft een groene jas aan en zegt: "Tweedledee".
De andere tweelingbroer heeft een rode jas aan en zegt: "Tweedledum".

5p **16** Onderzoek hoe de broer met de groene jas heet.

Elke tweelingbroer heeft altijd een zakdoek in zijn broekzak: als de ene tweelingbroer een rode zakdoek heeft, heeft de ander een zwarte en omgekeerd.
Op zekere dag komt Alice de tweelingbroers tegen. Ze vraagt aan een van beiden: "Welke kleur zakdoek heb je?"
Het antwoord van deze tweelingbroer luidt: "Zwart".
Op verzoek van Alice laat hij de zakdoek zien. Deze blijkt rood te zijn.
Daarop vraagt Alice aan de andere tweelingbroer: "Welke kleur zakdoek heb jij?"

4p **17** Welke kleur zal hij noemen? Leg duidelijk uit hoe je tot die conclusie komt.

Tweelingbroers

16 maximumscore 5

- Beide broers spreken de waarheid of beide broers liegen 2
- Dit is niet mogelijk op maandag tot en met zaterdag 1
- Alice ontmoet de broers dus op zondag 1
- Dan spreken beiden de waarheid dus de broer met de groene jas is Tweedledee 1

of

- Op maandag, dinsdag en woensdag zou Tweedledum antwoorden: "Tweedledum" en zou Tweedledee iets anders antwoorden dan "Tweedledee" 1
- Alice ontmoet hen dus niet op één van deze dagen 1
- Op vergelijkbare wijze volgt dat het geen donderdag, vrijdag of zaterdag is 1
- Alice ontmoet de broers dus op zondag 1
- Dan spreken beiden de waarheid dus de broer met de groene jas is Tweedledee 1

17 maximumscore 4

- Omdat de eerste tweelingbroer niet de waarheid spreekt, kan het die dag in ieder geval geen zondag zijn 1
- Op alle 'niet-zondagen' spreekt altijd exact één van beide tweelingbroers de waarheid 1
- Die waarheidsspreker is niet de eerste tweelingbroer dus moet het de tweede tweelingbroer zijn 1
- Zijn antwoord luidt: "Zwart" 1

(College voor Toetsen en Examens, 2015, wiskunde C (pilot), 2015-II)

Weekendje Winterberg

Op een toeristische website van de Duitse regio Sauerland staat de volgende tekst:

> We hebben een huisje in Winterberg in het Sauerland.
> Als we geen verplichtingen hebben, gaan we daar - als er sneeuw ligt of als er mooi weer wordt voorspeld - in het weekend naar toe.

De tekst bestaat, afgezien van de eerste zin, uit vier uitspraken die samen een logische redenering vormen.
De uitspraken zijn:

- A We hebben verplichtingen;
- B Er ligt sneeuw in Winterberg;
- C Er wordt voor Winterberg mooi weer voorspeld;
- D We gaan in het weekend naar ons huisje in Winterberg.

3p **13** Schrijf de logische redenering uit de tekst met behulp van de letters A, B, C en D en de logische symbolen.

Bekijk de volgende zin:

> Als we in het weekend niet naar Winterberg gaan, dan hebben we verplichtingen of er ligt geen sneeuw en er wordt geen mooi weer voorspeld.

Deze zin is op verschillende manieren te schrijven:

$$\neg D \Rightarrow (A \vee \neg B) \wedge \neg C$$

of

$$\neg D \Rightarrow A \vee (\neg B \wedge \neg C)$$

4p **14** Onderzoek welke van beide manieren in overeenstemming is met de tekst op de website. Licht je antwoord toe.

Weekendje Winterberg

13 maximumscore 3

- Nodig zijn 'niet A' en 'B of C' 1
- $\neg A \wedge (B \vee C) \Rightarrow D$ 2

Opmerking
Als in de formule de haakjes ontbreken, ten hoogste 2 scorepunten voor deze vraag toekennen.

14 maximumscore 4

Een aanpak als:

- Volgens de tekst op de website zijn er twee voorwaarden om in het weekend naar het huisje in Winterberg te gaan:
  - geen verplichtingen hebben
  - sneeuw of mooi weer 1
- Niet naar Winterberg gaan in het weekend betekent dat aan één of aan beide voorwaarden niet is voldaan 1
- Dat betekent dat er
  - verplichtingen zijn (A) of dat er
  - en geen sneeuw, en geen mooi weer is $(\neg B \wedge \neg C)$ 1
- Hierbij hoort $\neg D \Rightarrow A \vee (\neg B \wedge \neg C)$ 1

(College voor Toetsen en Examens, 2016b, wiskunde C (pilot) 2016-I)

Krantenartikel

Mogelijk tientallen doden door herrie

ROTTERDAM, 19 JUNI. In de regio Rijnmond overlijden jaarlijks mogelijk tientallen mensen aan de gevolgen van verkeersherrie. Dat concludeert de Milieumonitoring Stadsregio Rotterdam (MSR) vandaag in de jaarlijkse milieubarometer. Uit het rapport *Geluid, gezondheid en geld* blijkt dat één op de twaalf Rijnmonders slaapproblemen heeft door herrie. Bij ongeveer 3 procent neemt dat ernstige vormen aan. „Mensen raken daardoor gestrest en lopen een hoge bloeddruk op. Dat kan weer leiden tot een beroerte of hartinfarct”, aldus een woordvoerster van de Milieudienst Rijnmond. Volgens het rapport scoort de Rotterdamse regio niet slecht in vergelijking met andere steden. (ANP)

(ANP, 2008)

Artikel didactief

(Bloem, 2018)

Artikel Roodhardt-Doorman

Wiskunde C moet een volwaardig programma krijgen met een eigen gezicht. Zouden logica en logisch redeneren daar een rol in kunnen spelen? **Michiel Doorman** en **Anton Roodhart** bespreken hun ervaringen met het door henzelf ontwikkelde experimenteel materiaal.

Wiskunde: meer een filosofie dan wetenschap?

Eerste ervaringen met logisch redeneren in wiskunde C

Inleiding

Wiskunde C is nu nog een afgeleide van wiskunde A. Achter de schermen wordt echter gewerkt aan een aantrekkelijk en volwaardig vak waarvan de inhoud is afgestemd op vervolgstudies als kunst, rechten en taalwetenschappen. Wiskunde C gaat zich bovendien richten op een algemene wiskundige vorming in samenhang met de historische en culturele plaats van wiskunde in wetenschap en maatschappij. De ervaringen op scholen die met de nieuwe invulling experimenteren zijn hoopgevend (Peereboom, 2011). In ieder geval blijkt dat onderwerpen als meetkunde, algebra en logisch redeneren ook voor wiskunde C leerlingen zinvol en aantrekkelijk kunnen zijn.

Perspectief en de gulden snede lenen zich goed voor een toegankelijke en cultuur-historische benadering van meetkunde. Verschillende maten voor de leesbaarheidsindex – die de moeilijkheid van een tekst aangeeft – blijken een geschikte aanleiding voor algebra. Algebraïsche vaardigheden hoeven niet gemeden te worden, als ze maar in betekenisvolle contexten functioneren (zie Koolstra, 2007). Kan logica ook een relevant en aantrekkelijk onderwerp voor deze leerlingen zijn? Een werkgroep van cTWO[1] heeft hiertoe lesmateriaal ontwikkeld. In dit artikel laten we zien welke keuzes we gemaakt hebben en illustreren dit met ervaringen uit de klas.

Een kennismaking

Het lesmateriaal begint met enkele puzzelachtige opgaven om leerlingen kennis te laten maken met aspecten van logisch redeneren (zie ook Bronkhorst, 2008). Een van de eerste opgaven betreft uitspraken over even en oneven getallen:

John en Leny nemen de getallen 3 en 11 in gedachten en bedenken:
De som (3 + 11) is even.
Het product (3 × 11) is oneven

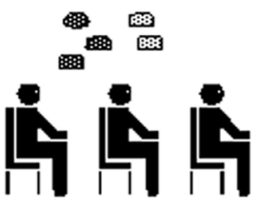
John zegt: “Als de som van twee getallen even is, dan is het product oneven.”

Leny zegt: “Als het product van twee getallen oneven is, dan is de som even.”
Hebben John en Leny gelijk?

Op een experimenteerschool antwoordt een leerling:
4 + 4 = 8 -> even
4 × 4 = 16 -> even
Leny heeft gelijk, haar bewering blijkt te kloppen.

De meeste leerlingen motiveren hun antwoord met getallenvoorbeelden. Een docent besprak dat met de vraag naar het identiek zijn van de formules $y = x^3$ en $y = x$. Ze geven hetzelfde resultaat na invullen van $x = 0$ en $x = 1$. Ben je nog niet overtuigd? Vul dan maar in $x = -1$. Kortom, je moet oppassen met een paar kloppende voorbeelden. Aan de andere kant is slechts één tegenvoorbeeld voldoende om een bewe- ring te weerleggen. Een volgende opgave betreft een bekende puzzel over rode en zwarte petjes:

(3) Er zijn 2 rode en 3 zwarte petjes. Drie kinderen kennen de petjes en zitten in een rij. Ieder kind krijgt een petje op. Ze kunnen alleen de petjes zien van degenen die voor ze zitten.

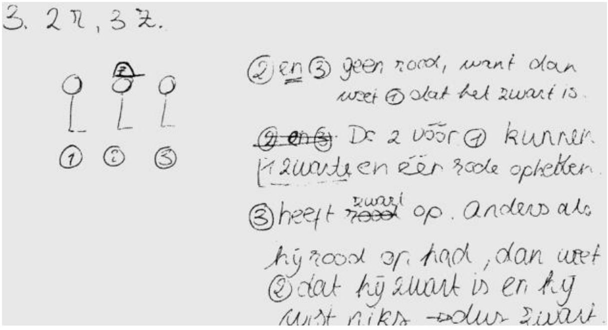


Aan het achterste kind wordt gevraagd: “Weet jij welke kleur pet je op hebt?”

Ze kijkt naar de 2 petjes voor zich, denkt even na en zegt dan: “Nee.” Vervolgens wordt dit aan de middelste gevraagd. Die ziet maar 1 petje voor zich, denkt na en antwoordt ook ontkennend.

De voorste is even stil en zegt: “Dan weet ik de kleur van mijn pet- je!” Welke kleur is dat?

Veel leerlingen vinden dit een lastige puzzel. Vooral het opschrijven van je redenering valt niet mee. Voor het inleven in het probleem is het mogelijk om verschillende situaties een paar keer na te spelen. Een tekening kan ook helpen. Dat is een van de aspecten van het in kaart brengen van redeneringen – het visualiseren – die in deze fase al aan bod kunnen komen.



Het analyseren van een redenering die gevolgd wordt bij het oplossen van een sudokupuzzel behoort ook tot de eerste serie opgaven. In een klas waren enkele leerlingen pas gemotiveerd voor dit lesmateriaal toen ze zagen dat sudoku's een mogelijk toepassingsgebied van logisch redeneren zijn.

Een talig vervolg

De eerste les stond vooral in het teken van puzzelen. Naast de rol van voorbeelden kwamen enkele als-dan-redeneringen impliciet aan de orde. Het lesmateriaal vervolgt met talige contexte**n**. De echte waarde van logica blijkt vaak bij complexe teksten; dat is een reden om vroeg met teksten te beginnen. De bedoeling is bovendien dat daarmee de behoefte wordt gewekt aan meer precisie. Veel teksten hebben we gehaald uit kranten en tijdschriften. Door het bestrijken van allerlei gebieden wordt getoond dat de wereld vol zit met logica en onlogica.

Logisch
Slechts 11% van de Nederlanders reist met de bus of trein. Dat is de helft van het gemiddelde in Europa.
Logisch! Voor de prijs van een enkeltje Lelystad-Weesp (€ 6,50) maak je in een gebied van 40 km rondom Rome 24 uur lang gebruik van al het openbaar vervoer (met uitzondering van vliegtuigen en taxi's). En voor die prijs kun je met je gezin de hele dag op een gezinskaart rondtoeren in Dresden. Ik snap het wel.

Leerlingen wordt in eerste instantie gevraagd om structuur in dergelijke teksten aan te brengen door uitgangspunten en conclusies te onderstrepen en pijlen en logische tekens toe te voegen. Ze ervaren dat redeneringen vaak onvolledig zijn. Bij bovenstaand artikel wordt gegeven dat de welwillende lezer natuurlijk best begrijpt wat de schrijver bedoelt, maar dat er strikt genomen een redeneerstap ontbreekt. En de vraag is dan: welke? Bovendien zijn dergelijke teksten een aanleiding om een relatie te leggen tussen verbindingswoorden uit de logica (*en*, *of*, *als-dan*) en woorden als 'indien', 'aldus', 'want', 'alleen als', …

Deze fase in het materiaal bleek best lastig voor leerlingen en docenten. Voor de leerlingen is natuurlijk het primaire doel van de opgaven om 'het antwoord' te vinden. Maar wat is het antwoord? Lang niet altijd zijn daar scherpe criteria voor. Het belangrijkste is dat leerlingen bewust worden welke dilemma's hier spelen en welke vragen je daarbij stelt. Hoe weet je dat? Weet je dat wel zeker? Wat is de conclusie en wat zijn de (soms deels verzwegen) uitgangspunten?

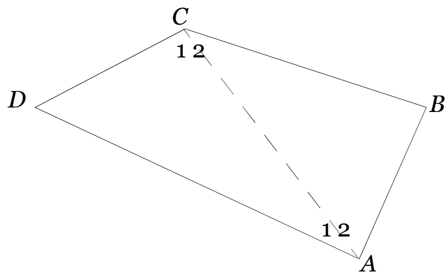
Het blijkt dat de logica in redeneringen soms ver te zoeken is. Een leerling verzuchtte tijdens de derde les: "Net als bij mijn biologieleraar, die zegt ook altijd dat iets logisch is, maar heeft dan kennelijk een heel andere redenering voor ogen dan ik kan bedenken."

Het volgende voorbeeld is meetkundig van aard. De meetkunde wordt niet systematisch opgebouwd, maar eenvoudige situaties zijn aanleiding om de samenhang tussen uitgangspunten, redeneerstappen en conclusies te analyseren.

(13) In een boek over meetkunde staat de volgende stelling:

Als ik een vierhoek heb, dan is de som van de hoeken 360 graden.

Het bewijs van deze stelling gaat als volgt:
Teken een willekeurige vierhoek en benoem de hoekpunten achtereenvolgens A , B , C en D ,



Deze vierhoek kun je altijd in twee driehoeken verdelen met de diagonaal AC . Zo krijg je de driehoeken ABC en ACD . De som van de hoeken in een driehoek is 180 graden. Dus $\angle A1 + \angle C1 + \angle D = 180°$ en $\angle A2 + \angle C2 + \angle B = 180°$. Hieruit volgt dat $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$ gelijk is aan 360 graden.

a) Verklaar de laatste redeneerstap.

Iemand twijfelt aan het bewijs. Stel dat punt D binnen de drie- hoek ABC ligt. Waar zijn dan de twee driehoeken?

b) Pas de stelling of het bewijs aan, zodat deze twijfel is weggenomen.

De vraag over de vierhoek kan goede discussies opleveren. Een docent laat leerlingen in groepjes deze opgave maken. Een groepje past het bewijs aan door de specifieke constructie van diagonaal AC niet meer te noemen: "Er is altijd een diagonaal die de vierhoek in tweeën deelt." Dan ontstaat de volgende discussie:

"Of moeten we dat nu ook eerst bewijzen? We moeten een andere manier van bewijzen vinden dan door hier een lijn te trekken."
"Je hoeft geen lijn te trekken. Je kunt ook zeggen dat de vierhoek uit 2 driehoeken bestaat."

"Maar in het bewijs kun je dan niet uitgaan van $A1$, $A2$, …"

Het mooie van dergelijke discussies is dat expliciet wordt welk type vragen je bij redeneringen kunt stellen en je kunt afvragen wat nu eigenlijk uitgangspunten zijn en hoe je die in een redenering gebruikt.

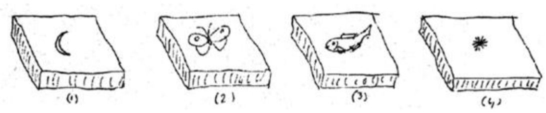
De taal van de logica

In het vervolg gaat het lesmateriaal over de bouwstenen van een redenering. Een redenering bestaat uit beweringen (die *waar* of *niet-waar* kunnen zijn) en verbindingswoorden die de samenhang aangeven. De structuur van de een redenering kan worden weergegeven met een (boom)schema. Leerlingen geven in teksten die structuur aan door onderstrepen of inkaderen.

Vervolgens wordt de taal van de logica geïntroduceerd waarin letters verwijzen naar beweringen en waarin verbindingswoorden vervangen worden door logische connectieven.

Na de behandeling van *of*, *en* en *niet*, volgt de implicatie. De valkuilen van de implicatie komen in de volgende opgave naar voren.

(31)Op de grond liggen vier zeer zware stenen. Op de ene kant is altijd een dier (vis, vlinder, ...) getekend en op de andere kant een hemellichaam (maan, zon, ...)
Iemand beweert: "Als aan de ene kant een maan staat, dan staat aan de andere kant een vis."



a) Stel de eerste twee stenen voldoen aan de bewering. Wat kan er dan aan de andere kant van de steen staan?
b) Kan aan de andere kant van steen 4 een vis staan?
c) Bij welke stenen kan aan de andere kant een maan staan?

De eerste steen met een maan geeft voor de leerlingen geen problemen, maar bij de volgende steen met een vlinder is het antwoord minder triviaal:
"Nee, achter 2 kan geen maan staan."
"Het kan een zon zijn."
"Ieder hemellichaam buiten de maan."
"Maar dan wordt het toch een andere bewering?"

Het vraagt wel wat oefening voordat je snel overziet wat je wel en wat je niet kunt concluderen. Een docent schreef op het bord de bewering: "Als het regent, dan kom ik met de bus naar school," en vroeg vervolgens aan de klas: "Vorige week maandag kwam ik met de bus. Kunnen jullie nu zeker weten dat het toen regende?" Leerlingen die het hiermee eens waren, staken hun vinger op. Hij schreef de uitslag op het bord en liet ze vervolgens verder werken uit het boekje. Aan het eind van de les kwam hij op zijn introductie terug en peilde nog een keer de stemming. Het was leuk om te merken dat toen vrijwel iedereen kon beargumenteren dat je niet zeker kon zijn over de regen. Een lekke band kan ook aanleiding zijn om met de bus te gaan. Een van de oefeningen is onderstaande opgave.

(37) Een agrarische setting:
"Als een zeug meer dan 30 dagen geleden gebigd heeft, dan is de melkproductie per dag minder dan $5\frac{1}{2}$kg."

Deze uitspraak is waar zolang je met deze opgave bezig bent.
In de volgende situaties weet je iets meer over het aantal dagen geleden dat er gebigd is of over de grootte van de melkproductie. Probeer telkens iets te concluderen met behulp van bovenstaan- de uitspraak:
a) De zeug heeft 35 dagen geleden gebigd.
b) De zeug heeft 23 dagen geleden gebigd.
c) De melkproductie is 5 kg per dag.
d) De zeug heeft 8 dagen geleden gebigd.
e) De melkproductie is meer dan $5\frac{1}{2}$kg per dag.
f) De zeug heeft minder dan 30 dagen geleden gebigd.

Op een van de experimenteerscholen hebben docenten een toetsopgave ontworpen over enkele zinnen, waaronder:

"Mark ruimt alleen zijn kamer op (k) als Els op bezoek komt (b)."

De vraag aan de leerlingen was om deze zinnen te schrijven in de taal van de logica. Dat dit nog niet vanzelfsprekend is, komt bijvoorbeeld door de alleen-als-constructie. Enkele uitwerkingen van leerlingen:
$k \Rightarrow b$
$\neg b \Rightarrow \neg k$
$b \Rightarrow k$

Door de alleen-als-constructie is de komst van Els een noodzakelijke voorwaarde voor het opruimen van de kamer. Maar er kunnen meer voorwaarden zijn! Bijvoorbeeld dat Marks kamer een zwijnenstal is. Kortom, het is niet zo dat *altijd* als Els op bezoek komt, Mark zijn kamer dan opruimt. Daardoor valt de derde uitwerking $b \Rightarrow k$ af. Hoewel hierbij aangetekend dient te worden dat de zin ook gelezen kan worden als aanscherping van "Mark ruimt zijn kamer op als Els op bezoek komt". Die zin is eigenlijk gelijkwaardig met het derde antwoord. Dit laat nog eens zien dat het omzetten van gewone taal naar formele taal niet vanzelfsprekend is. Veel van de context gaat verloren, terwijl die juist essentieel is voor de interpretatie van de zin. Het lesmateriaal biedt wel aanleiding om dit ter discussie te stellen, maar het wordt wellicht nog onvoldoende expliciet benadrukt.

De inhoud van deel 1 samengevat

Dit lesmateriaal wijkt af van gebruikelijke inleidingen tot de logica waarin de taal van de logica meestal het uitgangspunt is. We pogen het onderwerp een introductie te geven met teksten die juist om een logische verscherping vragen. Daarmee wordt de behoefte aan meer precisie gewekt. Door het bestrijken van allerlei gebieden wordt aangetoond dat de wereld vol zit met logica en onlogica (een mooi voorbeeld hiervan is te lezen in het hieraan voorafgaande artikel van Gerard Koolstra).

De representaties die hierbij gebruikt worden, zijn onderdeel van de taal van de logica: waarheidstabellen en boomstructuren. Waarheidstabellen helpen bijvoorbeeld om het verschil tussen de 'normale' *inclusieve of* (je moet een plaatsbewijs *of* een identiteitsbewijs bij je hebben) en de *exclusieve of* (je krijgt korting als je jonger dan 12 *of* ouder dan 65 bent) aan te geven. Zo'n tabel helpt ook om de gelijkwaardigheid tussen *als-* A *-dan-* B en *niet-* A *-of-* B (met de *inclusieve of*) aan te tonen.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	$\neg A$	B	$\neg B$
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1

Hierbij is in de eerste versie van het lesmateriaal ook een computerprogramma geïntegreerd (*The Truthtable Constructor* via http://www.brian-borowski.com/Truth/). Snel worden het namelijk grote tabellen en vraagt het invullen tijd en precisie. **De ervaringen hiermee op de experimenteerscholen zijn wisselend**. Veel leerlingen vonden het werk met de tabellen erg afleiden van waar het eigenlijk om gaat. We hebben besloten om in de uiteindelijke versie van het materiaal wel waarheidstabellen aan bod te laten komen, maar heel sporadisch. Het doel is dan in de eerste plaats om enkele aspecten van de connectieven te illustreren en in deel 2 om aan te geven hoe je kunt redeneren als je de logica niet beperkt tot een tweewaardig systeem.

Vervolg lesmateriaal: deel 2

In deel 2 wordt de taal van de logica verder uitgebreid met kwantoren en Venn-diagrammen. Deze uitbreidingen zijn geen doel op zich, maar ondersteunen en verdiepen de betekenis van logische begrippen. Een doel is bovendien dat leerlingen hiermee enige flexibiliteit ontwikkelen in het werken met dergelijke representaties bij het modelleren en analyseren van redeneringen. Contexten die hier gebruikt worden, zijn het zoeken met Google, een juridisch handboek en voorbeeldopgaven uit een studieboek voor taalwetenschappen (zie onderstaand figuur).

(25)

a. Erica roskamt alle paarden	a' $\forall x[P(x) \rightarrow Ro(e, x)]$
b. Dirk geeft alle paarden aan Erica	b' $\forall x[P(x) \rightarrow Ge(d, x, e)]$
c. Iedereen zag Dirk	c' $\forall x[Me(x) \rightarrow Zi(x, d)]$
d. Erica gooide alle ballen naar Dirk	d' $\forall x[Ba(x) \rightarrow G(e, x, d)]$

In (25c) is de kwantor beperkt tot mensen. Dit houdt voor B in dat Dirk en Erica beiden Dirk zagen: Dirk zag dus zichzelf. Het gebruik van *iedereen* voor twee personen is hier wat ongewoon, maar het is wel correct.

Oefeningen met kwantoren (*er-is-een* of *voor-alle*) vin- den ook in wiskundige context plaats:

(25)
Welke kwantoren kunnen op de stippeltjes staan zodat het een ware uitspraak wordt?
a. … $x[2x + 3 = 4x - 1]$

b. … $x[2x + 3 = 2(x + 1) + 1]$

c. … $x[(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)]$

Volgende hoofdstukken behandelen aspecten van classificeren, definiëren en axiomatiseren. Dit gebeurt onder de noemer *kennis in kaart*. We maken daarbij gebruik van zoekkaarten en contexten als het verkeer (Van Bergen, 2010). Hoe bepaalt de definitie van een 'skater' wat hij wel en niet mag? Een recent voorbeeld van de rol van een definitie betreft Lowlands. Het popfestival moet meer geld voor tickets vragen vanwege een hoger BTW-tarief. Dat tarief blijkt echter niet te gelden voor een circus. En waarom zou Lowlands geen circus zijn? Uit de krant:

Lowlands als circus

Het gerucht dat het festival de door het kabinet voorgenomen BTW-verhoging op de podiumkunsten zou willen ontlopen door zichzelf als circus te profileren, ontstond naar aanleiding van een interview met Omroep Flevoland.

Toch wordt de mogelijkheid van een dergelijke stap in de toekomst door Lowlands niet ontkend: "Het idee is er wel, maar dat is alles", legt Bollman uit. "Het is besproken en wij zien in de definities niet echt een duidelijk onderscheid tussen mu- ziek- en circusfestivals."

Het basisidee in dit hoofdstuk is telkens: Je hebt een hoeveelheid kennis. Die kennis is beschreven met behulp van proposities of een andere duidelijke manier. Logische redeneringen maken het mogelijk om de beginkennis uit te breiden en dat leidt tot kenniswinst.

Je kunt een bepaald kennisgebied zien als een verzameling uitspraken. Voorbeelden van zulke gebieden

Een bladzijde uit Logicomix

zijn meetkunde, de plantenflora, constructie- en compositieregels in de muziek en sociale regels. Uitstapjes naar taalkunde vervolgen de analyse van zinstructuren en zinsbouw in verschillende talen (onder andere met boomdiagrammen). En – ook facultatief – kan hier een uitstapje gemaakt worden naar de kunsttaal MIU uit *Gödel, Escher, Bach* van Douglas Hofstadter.

De laatste twee onderwerpen in deel 2 betreffen paradoxen en argumenteren. Paradoxen zijn een mooie aanleiding om de klassiekers van Zeno te behandelen, maar het is natuurlijk ook mogelijk om het verhaal van Russels paradox in de verzamelingenleer te bespreken (bijvoorbeeld als u net *Logicomix* gelezen heeft).

Het onderwerp argumenteren valt formeel buiten de afgebakende leerstof. Echter, het wegen van argumenten en het formuleren van een beslissingsregel (of een kosten-batenanalyse) geven leerlingen de gelegenheid om "over de rand te kijken". Het is daar niet de bedoeling om meer examenstof te bieden, maar om te laten zien dat er nog veel meer is dat raakt aan het onderwerp logisch redeneren. Bovendien biedt dit een mooie gelegenheid om het al bekende beter te funderen en te oefenen. De leerlingen worden voor een onbekende situatie geplaatst en moeten toch tot een aanpak komen. Een voorbeeld van een bruikbaar artikel is het volgende:

Verbied vuurwerk toch niet

Met enige verbazing las ik de afgelopen tijd stukken van mensen die pleiten voor de beperking van of zelfs een verbod op vuurwerk. Als reden noemt men de grote schade aan auto's, gebouwen en openbare voorzieningen.
Ik zou graag iets aan deze redenering willen corrigeren. Men doet nu alsof vuurwerk de boosdoener is van deze schade, maar dit is naar mijn mening niet juist. De werkelijke boosdoeners zijn personen die rond Oud en Nieuw uit zijn op rellen en hierbij soms een aanzienlijke dosis alcohol drinken.
Een verbod op vuurwerk heeft geen enkel effect. Sterker nog, de verkoop van illegaal vuurwerk zal alleen maar toenemen.
Ik vind het jammer dat veel briefschrijvers van *Trouw* zo negatief tegenover vuurwerk staan. Ik beleef veel plezier aan het afsteken van vuurwerk, net als veel andere mensen.
Ik hoop dat men inziet dat verbieden of beperken van vuurwerk geen oplossing is. De enige oplossing is het aanpakken van het gedrag van bepaalde personen tijdens de jaarwisseling.
***Hugo Koetsveld, 16 jaar** Hengelo (Ov.)*

Een argument is hier "een punt voor" of "een punt tegen" een bepaalde uitspraak. Om tot een conclusie te kunnen komen, worden die argumenten op een, soms mysterieuze manier, gewogen. Mogelijke vragen bij dit artikel zijn:

- Maak een lijst met argumenten pro en een lijst met argumenten contra vuurwerk.

– Bedenk een weging van de argumenten en een beslissingsregel.

Het slot van deel 2 besteedt aandacht aan het analyseren van teksten op hun logische inhoud. Voorbeelden van zulke teksten zijn mondelinge en schriftelijke betogen, bewijzen, discussies, dialogen en debatten. We zijn dan bezig met het veel ruimere begrip “argumentatie”. Veel aspecten daarvan kunnen in het standaardprogramma niet aan de orde komen. Maar het is voor de leerlingen wel nuttig dat ze daar terloops mee kennismaken. Hier is tevens een mogelijkheid voor de leraar om iets eigens van dit vak te maken. Samenwerking met Nederlands ligt op de stip.

Afsluitend

Eindtermen Domein F:
Logisch redeneren (40 slu)

13 De kandidaat kan logische redeneringen analyseren op correct gebruik.

De kandidaat kan

13.1 de correctheid van redeneringen en daarbij horende conclusies, zoals gebruikt in het maatschappelijk debat, verifiëren en analyseren.

13.2 drogredeneringen en paradoxen herkennen en beschrijven.

13.3 verschillende representaties, zoals tabel en diagram, gebruiken bij het analyseren en oplossen van logische problemen.

De ervaringen met logisch redeneren laten zien dat interactie nodig, misschien wel noodzakelijk is. Eén van de docenten had een kleine groep en liet leerlingen zelfstandig het materiaal doornemen. Dat leverde regelmatig vragen en vroeg meer aandacht dan gepland in deze opzet. Het bleek niet makkelijk om dit onderwerp te behandelen in een gecombineerde wiskunde A- en C-groep. De wiskunde C-leerlingen zouden tenminste een deel van hun onderwijstijd in klassikaal verband aan dit onderwerp moeten kunnen werken. Docenten gaven aan dat ze hierbij moesten investeren in een nieuwe didactiek die hiervoor geschikt is.

In het lesmateriaal komt een aantal facultatieve onderwerpen aan de orde die zich lenen voor praktische opdrachten of profielwerkstukken. Bovendien wordt iedereen uitgedaagd om het materiaal uit te breiden met actuele voorbeelden. Deze voorbeelden kunnen op de website van cTWO gepubliceerd worden. Laat daarmee dit onderwerp en wiskunde C uitgroeien tot een levendig vak dat aspecten van wiskunde laat zien die voor deze leerlingen relevant zijn en die elders geen plek hebben.

Michiel Doorman, Anton Roodhardt
Freudenthal Instituut

Noot

[1] Zie www.ctwo.nl.

Literatuur

Bergen, R. van (2010). Logica binnen wiskunde C. *Nieuwe Wiskrant 30*(2), 41-45.

Bronkhorst, H. (2008). Als de eerste rood is, dan zijn ze allemaal rood. *Euclides, 83*(5), 274-276.

Daemen, J.W.M.J. (2007). Wiskunde C, op weg naar 2010. *Euclides, 82*(4), 140-143.

Doorman, M. (2007). Wiskunde C: daar komt muziek in. *Nieuwe Wiskrant, 27*(1), 31-34.

Koolstra, G. (2007). Leesbaarheid gevangen in formules. *Euclides, 82*(6), 228-231.

Lange, J. de, e.a. (1998). *Wiskunde C rapport*, beschikbaar op www.cTWO.nl.

Peereboom, H. (2011). Het nieuwe wiskunde C. *Euclides, 86*(6), 236-239.

(Doorman & Roodhardt, 2011)

Kenniskaart SLO Wiskunde C

WISKUNDE C KENNISKAART VOOR DOCENTEN EN DECANEN

slo

nationaal expertisecentrum leerplan-ontwikkeling

Het geheel vernieuwde Wiskunde C examenprogramma

- Wiskunde C is een profielvak in het profiel Cultuur en Maatschappij in het vwo met een studielast van 480 slu's en bereidt voor op universitaire studies in de sector Recht, de sector Gedrag en Maatschappij en de sector Taal en Cultuur.
- Statistiek en kansrekening nemen, evenals bij wiskunde A, een belangrijke plaats in bij wiskunde C. De werkwijze is gebaseerd op de empirische cyclus: data verwerven-data verwerken-data analyseren en conclusies trekken. Door het werken met realistische en grote datasets is de inzet van ICT onmisbaar.
- Contexten, die passen in het profiel C&M, nemen een belangrijke plaats in bij wiskunde C. De nadruk ligt minder op de formeel-algebraïsche technieken en meer op het herkennen, interpreteren en gebruik van wiskunde in verschillende situaties.
- De profielspecifieke eigenheid van wiskunde C komt extra tot zijn recht door de nieuwe domeinen *Vorm en ruimte* (meetkundige principes toegepast in maatschappij, beeldende kunst en architectuur) en *Logisch redeneren* (logisch-wiskundige aspecten gekoppeld aan correctheid van redeneringen en conclusies, zoals bijvoorbeeld gebruikt in het maatschappelijk debat).

Kenmerken van de wiskunde C leerling

- Heeft, als C&M leerling, belangstelling voor praktische en aan cultuur en maatschappij gerelateerde wiskundeactiviteiten.
- Heeft het vermogen, en laat zich uitdagen, om relevante wiskundige problemen, samen met medeleerlingen, op een creatieve manier op te lossen.
- Heeft interesse in taal en affiniteit met logisch redeneren.
- Heeft interesse in beeldende kunst en architectuur en affiniteit met vorm en ruimte.
- Is blij dat de formele en abstracte wiskunde bij wis C nauwelijks nog aanwezig is

Gevolgen voor advisering door decanen en docenten

Het nieuwe wis C examenprogramma wijkt zoveel af van wis A (en het oude wis C) dat het erg lastig wordt om in klas 5 of 6 van wis A nog over te stappen naar wis C. Dat een CM leerling met wis A veel meer studiemogelijkheden open houdt, klopt slechts als het gaat om de sector Economie en een enkele studie in de sector Gezondheidszorg. In de praktijk blijkt dat de belangstelling van een CM-leerling hier niet naar uit gaat. De sectoren Recht, Taal en Cultuur en Gedrag en Maatschappij daarentegen bieden (vrijwel) gelijke mogelijkheden voor deze twee soorten wiskunde. Bij een aantal studies in de hierboven genoemde sectoren lijkt het nieuwe wis C juist een betere aansluiting te hebben dan wis A. Conclusie:

- Van '*Kies maar wis A want dan heb je veel meer doorstudeermogelijkheden en je kunt altijd nog terug naar wis C*" naar "***Kies wis C tenzij je nadrukkelijk de mogelijkheid tot een studie in de sector Economie open wil houden***".

Aparte wiskunde C klassen

Hoewel er sprake is van een overlap in de examenprogramma's (Statistiek) van wis A en wis C, verdient het een sterke voorkeur, mede op grond van ervaringen op de pilotscholen, dat aparte wiskunde C klassen vanaf 4-vwo gevormd worden. Hiervoor pleit:

1. De interesse en de mogelijkheden van de wis C-leerlingen vragen om een andere, eigen inhoud, aanpak en tempo dan wis A leerlingen.
2. Wis A is op het terrein van de algebraïsche vaardigheden behoorlijk verzwaard; in de gemengde WA/WC-klassen worden de wis C-leerlingen hier onnodig en ten onrechte ook mee geconfronteerd.
3. Het is op de pilotscholen gebleken dat, om (heel) kleine groepen te voorkomen, een verticale clustering, V4-V5-V6 wis C klassen, veel beter uitpakt dan het onderbrengen van wis C leerlingen in wis A groepen.

SLO
Bezoekadres
Piet Heinstraat 12
7511 JE Enschede
Nederland

Postadres
Postbus 2041
7500 CA Enschede
Nederland

T +31 (0)53 484 08 40
F +31 (0)53 430 76 92
E info@slo.nl
W www.slo.nl

ING Bank 66 48 51 908
KvK Oost Nederland 0608591б

(SLO, z.d.)

Referenties:

ANP. (2008, juni 19). Mogelijk tientallen doden door herrie. *NRC Handelsblad*, p. 2.

Bakker, H., Boon, B., Bos, D., Doekes, W., Peereboom, H., Van den Reek, K., … Wallien, C. (2017). *Moderne Wiskunde 11e editie 6 vwo C*. Groningen, the Netherlands: Noordhoff Uitgevers.

Bloem, F. (2018, februari 20). Wiskunde C: volwaardig vak. *Didactief*, *48*(3), 32–33.

Bor-de Vries, M., Van Dongen, J., Van Geest, D., Van Glabbeek, Y., Hof, I., Kaper, L., … Van Wolfswinkel, G. (in press). *MathPlus, 5 vwo / gymnasium wiskunde C - katern |||*. 's-Hertogenbosch, the Netherlands: Malmberg. Geraadpleegd van http://www.mathplus.nl/assets/downloads/files/Hoofdstukoverzicht%20MathPlus%20v7%201.pdf

College voor Toetsen en Examens. (2015, juni 26). wiskunde C, vwo in 2015 (pilot) - Examenblad. Geraadpleegd 15 december 2016, van https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-c-vwo-2/2015

College voor Toetsen en Examens. (2016a). *WISKUNDE C VWO | syllabus centraal examen 2018 (Bij het nieuwe examenprogramma) nader vastgesteld 2*. Geraadpleegd van https://www.examenblad.nl/examenstof/syllabus-2018-wiskunde-c-vwo/2018/vwo/f=/syllabus_wiskunde_C_2_versie_vwo_2018_nader_vastgesteld2_def.pdf

College voor Toetsen en Examens. (2016b, mei 25). wiskunde C, vwo in 2016 (pilot) - Examenblad. Geraadpleegd 15 december 2016, van https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-c-vwo-2/2016

Dijkhuis, J., Admiraal, C. J., Verbeek, J. A., De Jong, G., Houwing, H., Kuis, J. D., … Cornelisse, I. (2017). *Getal & Ruimte 11e editie vwo C deel 4*. Groningen, the Netherlands: Noordhoff Uitgevers. Geraadpleegd van http://catalogus.noordhoffuitgevers.nl/shop/nu/getal---ruimte-11e-ed-leerboek-vwo-c-deel-4

Doorman, M., & Roodhardt, A. (2011). Wiskunde: meer een filosofie dan wetenschap? *Nieuwe Wiskrant*, *30*(4), 43–48.

Roodhardt, A., & Doorman, M. (2015). *Module wiskunde C vwo Logisch redeneren (cTWO)*. Geraadpleegd van http://www.betanova.nl/downloads/LesmateriaalWiskundeCvwo/module-wiC-vwo-Logisch-redeneren.pdf/

SLO. (z.d.). Kenniskaart wiskunde C vwo. Geraadpleegd van http://www.betanova.nl/downloads/Wiskunde_C_kenniskaart.pdf/download